第８講　波とエネルギー（波動）

1 （解答用紙３）

図１のように，外洋と港が直線状の防波堤によって隔てられ，平面波が外洋から打ち寄せている。この平面波の振幅および波長は一定で，波面は防波堤と平行である。防波堤には，船の出入りのため開口部が設けられており，その幅 h は，波の波長と大差ない程度の範囲で，変えることができる。波の速さは外洋でも港でも同じであり，防波堤や岸壁による波の反射は無視できるとして，以下の設問に答えよ。

Ⅰ　波は開口部を通して図１のように港に入り，防波堤のかげに回り込む。このような現象は何と呼ばれるか。またそれは，波に関するどのような原理または性質により説明されるか。

Ⅱ　開口部の中心から岸壁に向かって，防波堤と垂直に距離 r だけ離れた点Ｃを考える。r が h よりかなり大きい場合には，Ｃ点での波の振幅 a は開口部の幅 h に比例する。なぜそうなるか，理由を簡単に述べよ。

港に入った波は，開口部から十分に遠くでは，開口部の中心を頂点とする，頂角 θ の扇形に広がると近似できる。また一般に，波面に沿う長さ L の区間を通過する波のエネルギーは，波の振幅が波面に沿って一定であるとき，波の振幅の２乗と L とに比例する。このことを知って，ひきつづき以下の設問に答えよ。

Ⅲ　港に入りこんだ波の振幅は，頂角 θ があまり大きくない限り，円弧 C′CC″ に沿ってほぼ一定で，その外側では０になると近似できる。また，波のエネルギーは保存されるので，円弧 C′CC″ を通過する波のエネルギーは，開口部を通して港に入りこむ波のエネルギーに等しい。これらのことと設問Ⅱから，開口部の幅 h を変えたとき，頂角 θ が h の何乗に比例して変わるか，理由をつけて述べよ。

Ⅳ　Ｃ点を防波堤から岸壁に向けてしだいに遠ざけていくとき，そこでの波の振幅 a は，距離 r の何乗に比例して変わるか。理由をつけて述べよ。

< Note >

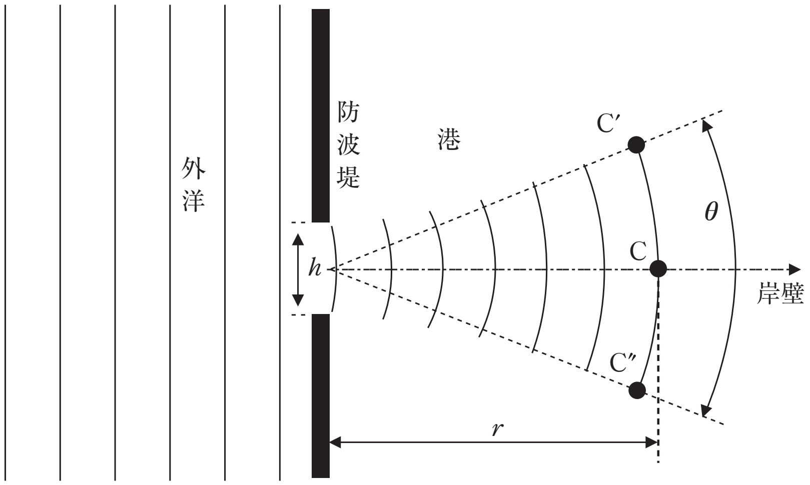


図１

＜ Note ＞

2 （解答用紙3）

暗箱に小さな円形の穴(ピンホール)を開け，これを通して外部の物体をスクリーン上に投影する図1のような装置をピンホールカメラと呼ぶ。実際には物体の一点から出た光がピンホールを通ってスクリーンに達するとき，次の二つの要因によってボケが生じる。

A. 点光源から出た光が直進し，スクリーン上に写しだすピンホールの大きさ：w_1

B. 回折による光の広がり：w_2

この結果，点光源はスクリーン上において大きさ(w_1+w_2)の像をつくると考えよう(図2)。この光の像が小さいほどボケは少なくカメラの性能(分解能)は良い。この二つの光の広がりを以下の考察にしたがって導き，最も分解能の良いピンホールカメラを設計しよう。

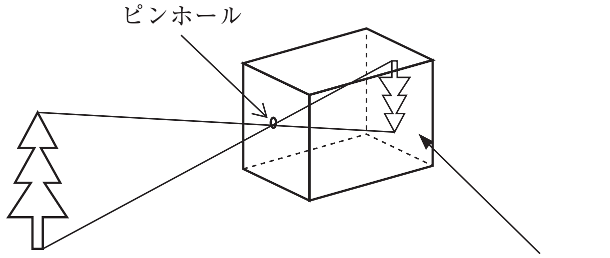


図1

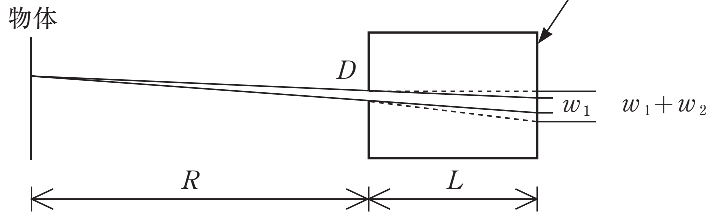


図2

Ⅰ　図2のように物体とピンホールの距離をR，ピンホールとスクリーンの距離をL，ピンホールの直径をDとしたときのw_1を求めよ。

Ⅱ　考察を容易にするために，直径Dのピンホールを通った光の回折広がりは幅Dの単スリットを通った平行光線の回折広がりと等しいとする。これを以下のように求めよう。

(1)　単スリットによる光の回折を求めるために，まずよく知られた複スリットによる光の回折を考察する。図3のように左方から波長λの平行光が，距離$2d$だけ離れた十分幅の狭い二つのスリットS_1，S_2に垂直に入射し，スリットから距離L離れたスクリーンに干渉縞をつくる。図3のようにスクリーン上に座標軸xをとり，スクリーン上にできる干渉縞の暗い部分の位置を$x=a$としたとき，λ，d，L，aが満たすべき条件を求めよ。

(2)　図4のように複スリットを幅Dの単スリットに置き換える。単スリットを通過した光は回折のためスリット幅よりも広がり，スクリーン上で図5のような干渉縞をつくることが知られている。この光の広がりを以下の考え方にしたがって求めよう。

＜ Note ＞

図６のようにスリットを S_1O，および OS_2 の長さの等しい二つの部分にわけ，それぞれを通る光の光路を各部分の中点 M_1，M_2 を通る光線の光路で代表させる。すなわち図５の干渉縞は，M_1，M_2 を通過する光の干渉によって現れると考える。スクリーン上において $x=0$ の上下で最初に暗くなる位置を x_1，x_2 とすると光の広がり Δx は，$\Delta x=|x_1-x_2|$ と近似してよい。Δx を求めよ。D, λ は L に比べ十分に小さいものとする。このとき次の近似式を用いてよい。

$|\alpha|\ll 1$ のとき，$\sqrt{1+\alpha}=1+\dfrac{1}{2}\alpha$

Ⅲ　$w_2=\Delta x$ と考えて，スクリーン上における点光源の像の大きさ (w_1+w_2) を求め，これがピンホールの直径 D によって変化する様子を示すグラフをかけ。次に像の大きさを最小にするピンホールの直径 D_0 を，R，L，λ を用いて表せ。

Ⅳ　$L=0.1\text{m}$ のピンホールカメラで $R=0.9\text{m}$ の位置に置かれた大きさ 0.1m の人形を撮影したい。光の波長が $\lambda=5\times10^{-7}\text{m}$ のとき以下の問に答えよ。

⑴　このとき像のボケの大きさを最小にするピンホールの直径 D_0 の値を求めよ。

⑵　スクリーン上での像の大きさを求めよ。また $D=D_0$ のとき，像のボケの大きさ (w_1+w_2) はいくらになるか。

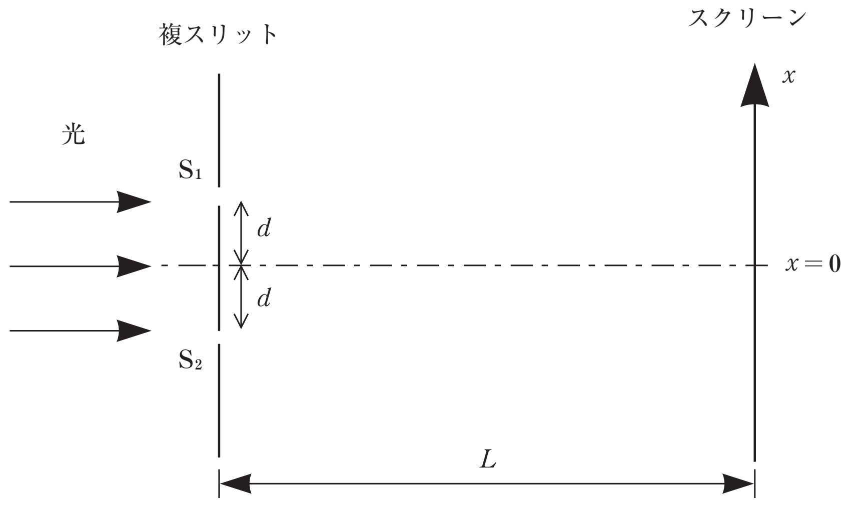


図３

< Note >

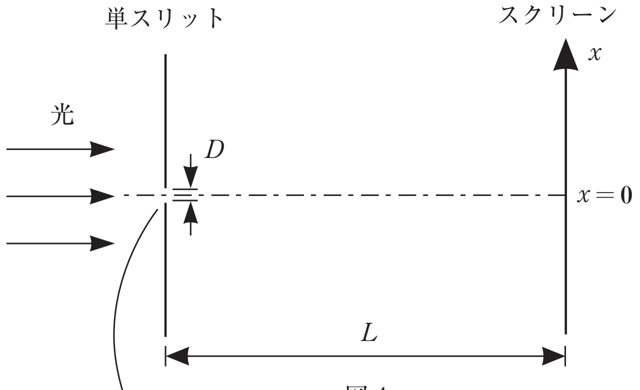


図４

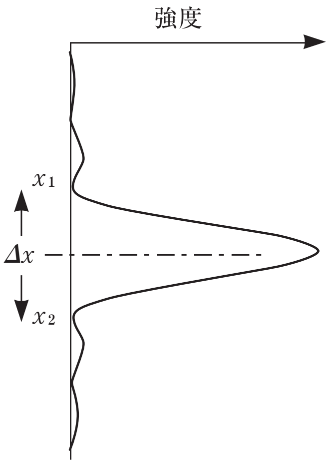


図５

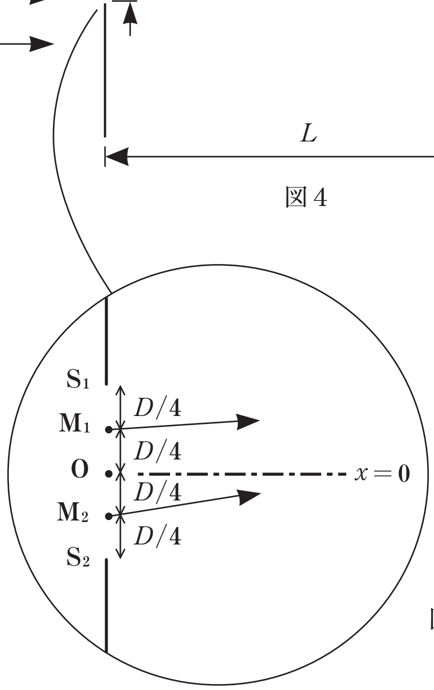


図６　スリット部分の拡大図

< Note >

第８講　確認テスト

1　（解答用紙３）

図１(a)のように yz 平面上に設置した等間隔ではない多数の同心円状の細いスリットを用いると，x 軸に平行に入射した光の回折光を図１(b)のように集めて収束させることができる。以下では問題を簡単にするため，同心円状のスリットを図１(c)に示すような直線状の細い平行なスリットで置き換えて，その原理を考えよう。以下の設問に答えよ。

図２に示すように，x 軸上の原点Ｏを通り x 軸に垂直な面Ａと，面Ａから距離 d だけ離れたスクリーンＢを考える。y 方向(紙面に垂直)に伸びた細いスリット S_0，S_1，S_2，…を面Ａ上の $z=z_0$，z_1，z_2，…（$0<z_0<z_1<z_2\cdots$）の位置に配置する。波長 λ の光が，面Ａの左側から x 軸に平行に入射し，スリットを通過してスクリーンＢに到達する。まず，スリット S_0, S_1 のみを残し，他のスリットを全てふさいだところ，スクリーンＢ上に干渉縞が生じた。

(1)　スクリーンＢ上で $z=\dfrac{z_0+z_1}{2}$ の位置Ｔにできるのは明線であるか暗線であるか。また，その理由を簡潔に述べよ。

(2)　スクリーンＢ上で，この位置Ｔより下方(z のより小さい方)に最初に現れる明線を，スリット S_0, S_1 に対する１次の回折光と呼ぶ。１次の回折光が, $z=0$ の位置Ｒにあった。z_0，z_1 は d より十分に小さいものとして，d を λ，z_0，z_1 を用いて表せ。必要ならば，近似式 $\sqrt{1+\delta}\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}\delta$ ($|\delta|$ は１より十分に小さいものとする)を用いてよい。

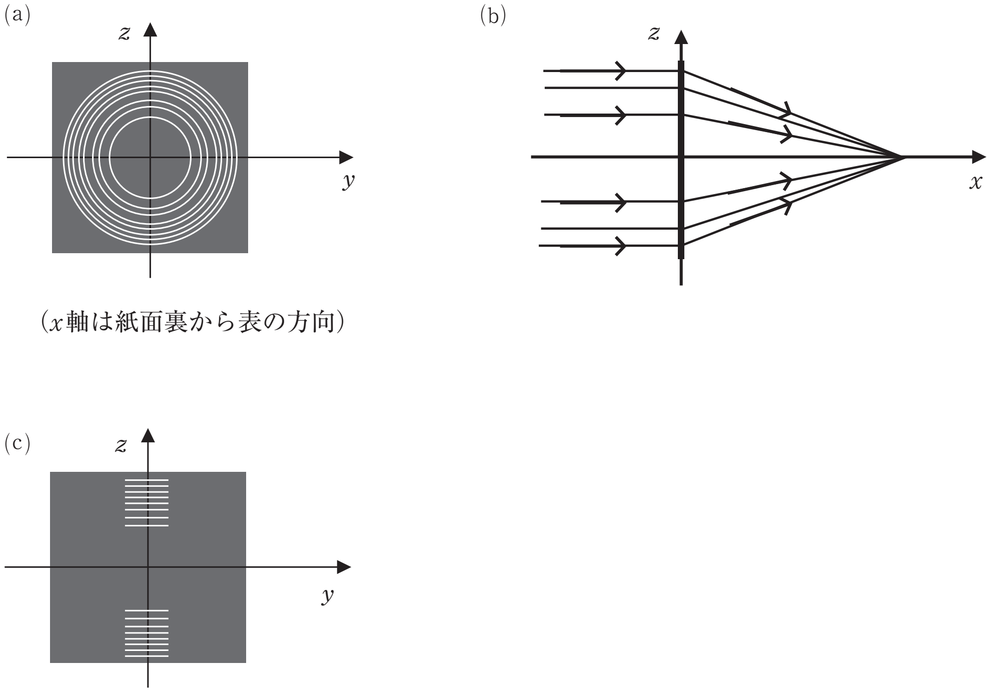
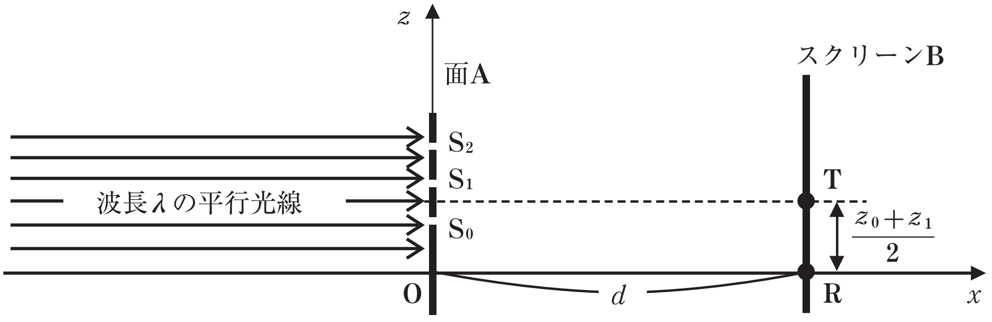


図１

＜ Note ＞



（y軸は紙面表から裏の方向）

図２

次に，$z>0$ の領域にある合計 N 本の多数のスリットすべてを用いる場合を考える。すべての隣りあうスリットの組 S_n と S_{n+1}（$n=0$，1，2，…）について，それらの１次の回折光がRに現れるためには，その方向が n とともに少しずつ変わるようにスリットを配置する必要がある。このように面Aに N 本のスリットを設置したところ，Rに鮮明な明線が現れた。

(3)　このとき n 番目のスリットの位置 z_n は n のどのような関数になっているか。z_n を z_0，n，d，λ を用いて表せ。

(4)　スクリーンBを x 軸に沿って左右に動かすと，他にも $z=0$ に明線が現れる位置があった。それらの x 座標をRに近い順に２つ答えよ。

(5)　左側から平行光線を入射する代わりに，図３に示すように x 軸上の原点Oから距離 a の点Pに波長 λ の点光源を置き，スクリーンBを x 軸に沿って左右に動かすと，$z=0$ に明線が現れる位置R′があった。その x 座標 b を，λ を含まない式で表せ。ただし，$z=z_0$，z_1，z_2，…は a，b より十分に小さく，$a>d$ かつ $b>d$ であるとする。

(6)　図４は，設問(5)の状況において，R′近傍に現れる明線の光の強度分布を z の関数として示したものである。ただし，光の強度とは単位時間あたりに単位面積に到達する光のエネルギーである。図１(c)のように，$z<0$ の領域にも $z>0$ の領域と対称にスリットを配置して，スリットの総数を２倍にした。このとき，明線の強度や幅が変化した。以下の文中の［　　］内に入るべき適当な整数もしくは分数を答えよ。

スリットの総数が２倍になったので，点R′における光の波（電磁波）の振幅は［　ア　］倍になる。光の強度は光の波の振幅の２乗に比例することが知られているので，点R′での光の強度は［　ア　］の２乗倍になる。一方，明線内に単位時間に到達する光のエネルギーは［　イ　］倍になるはずである。このことから，スリット数を２倍に増やすと明線の z 方向の幅は，約［　ウ　］倍となると考えられる。

＜ Note ＞

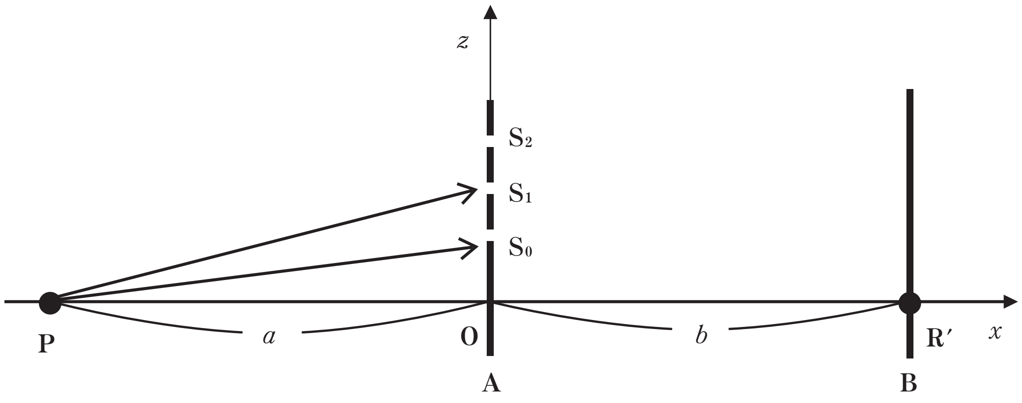


図３

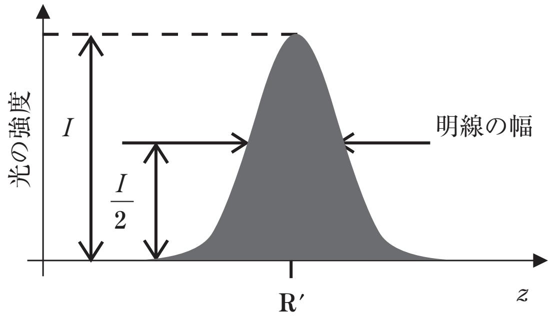


図４

＜ Note ＞

第８講　解答

1

Ⅰ　現象：回折　　原理：ホイヘンスの原理(説明は略)

Ⅱ　略

Ⅲ　-1 乗(理由は略)

Ⅳ　$-\dfrac{1}{2}$ 乗(理由は略)

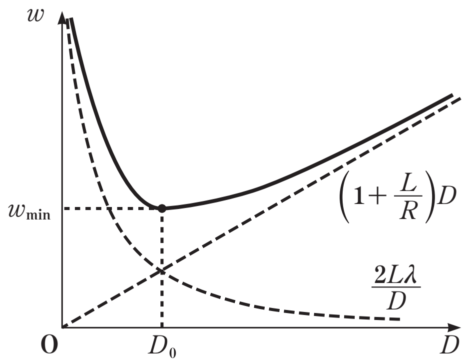
2

Ⅰ　$w_1=\left(1+\dfrac{L}{R}\right)D$

Ⅱ　(1)　$\sqrt{L^2+(a+d)^2}-\sqrt{L^2+(a-d)^2}=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$　($m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$)

　(2)　$\dfrac{2L\lambda}{D}$

Ⅲ　$D_0=\sqrt{\dfrac{2R}{R+L}L\lambda}$　　グラフは右



Ⅳ　(1)　3.0×10^{-4}[m]

　(2)　像の大きさ　1.1×10^{-2}[m]

　$w_{min}=6.7\times10^{-4}$[m]

第８講　確認テスト

【解答】

(1)　明線(理由は解説参照)　(2)　$\dfrac{{z_1}^2-{z_0}^2}{2\lambda}$　(3)　$\sqrt{{z_0}^2+2nd\lambda}$

(4)　$\dfrac{d}{2}$，$\dfrac{d}{3}$　(5)　$\dfrac{ad}{a-d}$　(6)　ア：2　イ：2　ウ：$\dfrac{1}{2}$

【解説】

(1)　S_0，S_1 に達した光は同位相。また，$S_0T=S_1T$ ゆえ，T に達した光は同位相で強め合う。よって，明線。

(2)　$S_1R=\sqrt{d^2+{z_1}^2}\fallingdotseq d\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_1}{d}\right)^2\right\}=d+\dfrac{{z_1}^2}{2d}$，$S_0R\fallingdotseq d+\dfrac{{z_0}^2}{2d}$ ゆえ，強め合う条件は，

$$S_1R-S_0R=\lambda$$

$$\left(d+\frac{{z_1}^2}{2d}\right)-\left(d+\frac{{z_0}^2}{2d}\right)=\lambda \qquad \therefore\ d=\frac{{z_1}^2-{z_0}^2}{2\lambda}$$

(3)　(2)と同様に，

$\dfrac{z_n^2-z_{n-1}^2}{2\lambda}=d$　$\therefore$　$z_n^2-z_{n-1}^2=2d\lambda$　($n=1$，2，…)が成立。n を 1 から n まで走らせて和をとれば，

$$z_n^{\ 2}-z_0^{\ 2}=2d\lambda\times n \qquad \therefore\ z_n=\sqrt{z_0^{\ 2}+2nd\lambda}$$

(4)　(3)より，経路差 λ で強め合うとき，

$$\frac{z_n^{\ 2}-z_0^{\ 2}}{2n}=d\lambda \quad (一定)$$

となるので，経路差 $m\lambda$ のとき，($m=2$，3，…)

$$d\lambda=x\times m\lambda \qquad \therefore\ x=\frac{d}{m}$$

よって，R に近い方から順に，$x=\dfrac{d}{2}$，$\dfrac{d}{3}$

(5)　(3)の結果を利用して，

$$\frac{z_n^{\ 2}-z_{n-1}^{\ 2}}{2a}+\frac{z_n^{\ 2}-z_{n-1}^{\ 2}}{2b}=\lambda=\frac{z_n^{\ 2}-z_{n-1}^{\ 2}}{2d}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d} \qquad \therefore\ b=\frac{ad}{a-d}$$

(6)　ア：2　イ：2　ウ：$\dfrac{1}{2}$

(解説は略)